**Вариационное исчисление и методы оптимизации**

**Специальность – Математика**

**Курс – 3, семестр - 5**

**Часть 2. МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ**

**Лекция № 12. Принцип максимума Понтрягина**

Рассматривается простейшая задача оптимального управления. Она состоит в минимизации функционала, зависящего от двух функции – управления и состояния системы. При этом состояние системы характеризуется задачей Коши для обыкновенного дифференциального уравнения. На управление заданы некоторые ограничения. Для решения задачи выводятся необходимые условия оптимальности в форме принципа максимума. Они состоят в минимизации по управлению некоторой функции, зависящей также от состояния системы и решения сопряженной системы. Рассматривается пример. Для практического его решения применяется принцип максимума и метод последовательных приближений.

### 12.1. Простейшая задача оптимального управления

Рассматривается система, описываемая уравнением

 (12.1)

с начальным условием

*х*(0) = *х*0 ,(12.2)

где *x = x*(*t*) – функция состояния системы, *u = u*(*t*) – управление, *f* – известная функция своих аргументов, *х*0 – известное начальное состояние системы. Задавая некоторое значение функции *u* и решая задачу Коши (12.1), (12.2), можно определить закон эволюции рассматриваемой системы, т.е. изменение со временем функции состояния.

На практике управление обычно выбирается из некоторого множества допустимых управлений, описывающего совокупность ограничений, налагаемых на систему. Будем полагать, что множество допустимых управлений определяется равенством

*U =* {*u* | *a*(*t*) ≤ *u*(*t*) ≤ *b*(*t*), *t*∈(0,*T*)},

где *a*, *b* – известные значения, причем первое из них может соответствовать -∞, а второе ∞.

В качестве критерия оптимальности выбирается функционал

,

где *g* и *h* – известная функция своих аргументов. Если управление однозначно определяет состояние системы (12.1), (12.2), то критерий оптимальности будет зависеть только от управления.

В результате приходим к следующей постановке задачи:

**Задача 12.1.***Найти такую функцию* *u* *из множества* *U*, *которая минимизирует на этом множестве функционал* *I*.

### 12.2. Принцип максимума.

Для решения задачи в соответствии с методом множителей Лагранжа введем функционал



Очевидно, в том случае, когда функция *х* удовлетворяет уравнению (12.1), для любой функции *р*функционалы *L* и *I* совпадут.

Определим функцию

*H*(*t*,*u*,*x*,*р*) = *р f*(*t*,*u*,*x*) – *g*(*t*,*u*,*x*). (12.3)

Тогда функционал *L* записывается в виде

.

Предположим, что функция *u* является оптимальным управлением, т.е. справедливо неравенство

Δ*I* = *I*(*v*,*y*) – *I*(*u*,*x*) ≥ 0 ∀*v*∈*U*, (12.4)

где *х* и *у* – решения задачи (12.1) и (12.2) на управлениях *u* и *v* соответственно. Тогда неравенство (12.4) может быть сведено к соотношению

Δ*L* = *L*(*v*,*y*,*р*) – *L*(*u*,*x*,*р*) ≥ 0 ∀*v*∈*U*, ∀*р* (12.5)

Найдем приращение функционала



где

Δ*H* = *H*(*t*,*v*,*y*,*р*) – *H*(*t*,*u*,*x*,*р*), Δ*h* = *h*[*y*(*T*)] – *h*[*x*(*T*)].

Предположим, что входящие в постановку задачи известные функции являются достаточно гладкими. Тогда, обозначив Δ*х*=*у*–*х* и пользуясь разложением в ряд Тейлора, получаем

*h*[*y*(*T*)] = *h*[*x*(*T*) + Δ*x*(*T*)] = *h*[*x*(*T*)] + *hх*[*x*(*T*)] Δ*x*(*T*) + *η*1,

где *hх* = *dh*/*dx*, а *η*1 есть величина более высокого порядка относительно Δ*х*(*T*). Аналогично находим значение

*H*(*t*,*v*,*y*,*р*) = *H*(*t*,*v*,*х*+Δ*x*,*р*) = *H*(*t*,*v*,*х*,*р*) + *Hх*(*t*,*v*,*х*,*р*) Δ*x* + *η*2 =

= *H*(*t*,*v*,*х*,*р*) + *Hх*(*t*,*u*,*х*,*р*) Δ*x* + *η*2 + *η*3,

где *Hх* = ∂*H*/∂*x*, *η*2 есть величина более высокого порядка относительно Δ*х*,

*η*3 = [*Hх*(*t*,*v*,*х*,*р*) – *Hх*(*t*,*u*,*х*,*р*)] Δ*x*.

В результате сделанных преобразований неравенство (12.5) приводится к следующему виду

 (12.6)

где

Δ*uH* = *H*(*t*,*v*,*x*,*р*) – *H*(*t*,*u*,*x*,*р*),



Интегрируя по частям, находим значение интеграла



поскольку *х*(0) = *у*(0) = *х*0. В результате неравенство (12.6) приводится к виду

 (12.7)

Учитывая произвольность функции *р*, подберем ее таким образом, чтобы соотношение (12.7) имело как можно более простой вид. Для этого достаточно предположить, что эта функция удовлетворяет уравнению

 (12.8)

с условием

*р*(*T*) = -*hx*. (12.9)

Соотношения (12.8), (12.9) называют *сопряженной системой*. В результате неравенство (12.7) записывается следующим образом:

 (12.10)

Пусть ** есть произвольная точка интервала (0,*Т*), а *w* – произвольное допустимое управление. Определим управление (см. рис. 12.1)

.

Его называют *игольчатой вариацией* управления *u*. Она принадлежит множеству *U* и для достаточно малых значений ** является сколь угодно близкой к *u*. Тогда для этого управления выполняется неравенство (12.10).



Рис. 12.1. Игольчатая вариация управления.

Подставляя управление  в неравенство (12.10) и учитывая, что управления *v* и *u* различаются лишь на интервале (** ****  **), приходим к соотношению

 (12.11)

где  есть остаточный член *η* при 

Отметим, что в силу близости управления  к *u* при малых значениях **, соответствующее ему состояние системы будет достаточно близко к оптимальному состоянию *х*, а значит, приращение Δ*х* будет достаточно мало. Тогда величина , в принципе, будет иметь второй порядок малости. Разделим неравенство (12.11) на 2** и перейдем к пределу при **→0 с учетом теоремы о среднем. Будем иметь



Учитывая произвольность точки  и значения управления , приходим окончательному соотношению

 (12.12)

Хорошо бы дать обоснование

В результате приходим к следующему утверждению, называемому принципом максимума Понтрягина:

**Теорема 12.1.** *Для того* *чтобы управление* *u* *было решением задачи оптимального управления*, *необходимо*, *чтобы оно удовлетворяло условию максимума* (12.12), *где* *х* – *соответствующее ему* *решение задачи* (12.1), (12.2), а *р* – *решение сопряженной системы* (12.8), (12.9).

**Замечание 12.1**. Любая теорема включает в себя некоторые условия, гарантирующие справедливость имеющихся утверждений. Однако строгая формулировка условий этой теоремы не входит в наши планы. Нас интересует ход рассуждений, которые привели к принципу максимума, и его практическое применение. Что касается доказательства теоремы, то основная сложность здесь связана с обоснованием предельного перехода в неравенстве (12.11) после деления на 2**.

В соответствии с принципом максимума для решения задачи требуется найти функции *u*, *х*, *р* из соотношений (12.1), (12.2), (12.8), (12.9), (12.12). Эффективность принципа максимума обусловлена тем обстоятельством, что от задачи минимизации исходного функционала мы перешли к задаче на условный экстремум функции *Н*, для которой известен явный вид зависимости от управления. Однако за возможность этого перехода приходится расплачиваться появлением еще одной неизвестной функции *р*.

### 12.3. Пример.

Для того чтобы понять природу принципа максимума рассмотрим достаточно простой пример. Пусть состояние системы описывается соотношениями

 (12.13)

Имеются множество допустимых управлений

*U =* {*u* | | *u*(*t*) | ≤ 1, *t*∈(0,1)}

и функционал



Требуется найти такую функцию *u = u*(*t*), которая минимизирует на множестве *U* функционал *I*.

Для приведения данной задачи к стандартному виду определим

*f*(*t*,*u*,*x*) = *u*, *x*0 = 0, *T*=1, *g*(*t*,*u*,*x*) = (*u*2 + *x*2)/2 , *ϕ**a* = -1, *b*= 1.

В соответствии с формулой (12.3) находим функцию

*H = H**u*) *=**р u* – (*u*2 + *x*2)/2 .

Тогда сопряженная система (12.8), (12.9) принимает вид

 (12.14)

Условие максимума (12.11) записывается следующим образом:

 (12.15)

Итак, для нахождения трех неизвестных функций *u*, *х*, *p* мы имеем три соотношения (12.13) – (12.15). Найдем, прежде всего, решение задачи (12.15) на условный экстремум функции *Н*. Приравнивая нулю ее производную, будем иметь условие стационарности

∂*H*/∂*u* *=**p* – *u =*,

откуда следует, что функция *Н* имеет единственную точку локального экстремума *u* = *p*, называемую также точкой стационарности. Поскольку вторая производная от *Н* отрицательна, мы имеем дело именно с ее максимумом.

Найденное значение управления соответствует безусловному экстремуму рассматриваемой функции. Однако значение *u* = *p*может располагаться произвольным образом относительно отрезка [-1,1] (см. рис. 12.2). При *p*1 функция *Н* на этом отрезке убывает, а значит, ее максимум достигается на минимально допустимом значении управления, т.е. *u*=-1При *p*1 функция *Н* на заданном интервале возрастает, а следовательно, ее максимум достигается на максимально допустимом управлении, т.е.   
*u* = 1Наконец, при |*p*≤1значение *u* = *p* является допустимым, а значит, оказывается решением условия максимума. В действительности функция *p* является переменной, и в отдельные моменты времени может по-разному располагаться относительно интересующего нас отрезка [-1,1] . В результате получаем

. (12.16)



Рис. 12.2. Условный максимум функции *Н*.

Формула (12.16) дает решение условия максимума (12.15) и позволяет найти управление, если известна функция *p* (см. рис. 12.3). Подставляя это значение в соотношение (12.13), получаем систему (12.13), (12.14), включающую в себя неизвестных функции *х* и *p*. Если бы в результате мы имели задачу Коши для системы двух (хотя бы и нелинейных) дифференциальных уравнений, то ее практическое решение не вызывало бы никаких затруднений. К сожалению, краевые условия для функций *х* и *p*заданы в разные моменты времени. В этом случае имеющаяся система может быть решена исключительно итерационно.



Рис. 12.3. Решение условия максимума при известном значении *р*.

### 12.4. Приближенное решение задачи.

Ввиду невозможности параллельного решения системы (12.13), (12.14) из-за того, что краевые условия для функции состояния и решения сопряженной системы заданы в разные моменты времени, полученные соотношения следует реализовывать последовательно. Согласно *методу последовательных приближений* на *k*-ой итерации при известном управлении *uk* из задачи Коши

 (12.17)

находится функция *хk* . Затем, решая сопряженную систему

 (12.18)

определяет функцию *pk*. Наконец, новое приближение управления *uk*+1 вычисляется по формуле

. (12.19)

Оценим сходимость итерационного процесса. Зададим некоторое начальное приближение *u*0. Оно непременно должно быть элементом множества допустимых управлений, а значит, удовлетворять неравенству

-1 ≤ *u*0(*t*) ≤ 1, *t*∈[-1,1].

Интегрируя последнее выражение от нуля до произвольного значения *t* и пользуясь соотношениями (12.17), имеем



В результате интегрирования полученного выражения от некоторого значения *t* до единицы, получаем



Поскольку значения *p*0 не выходят за пределы заданного интервала [-1,1], в соответствии с формулой (12.19), находим новой приближение управления *u*1(*t*)*p*0(*t*). При этом справедливо неравенство

-1/2 ≤ *u*1(*t*) ≤ 1/2, *t*∈[-1,1].

Интегрируя полученное соотношение, будем иметь



В результате интегрирования этого неравенства от некоторого значения *t* до единицы, получаем



Тогда из равенства (12.19) следует, что новое приближение управления будет удовлетворять неравенству

-1/4 ≤ *u*2(*t*) ≤ 1/4, *t*∈[-1,1].

Повторяя приведенные выше выкладки, приходим на следующей итерации к соотношению

-1/8 ≤ *u*3(*t*) ≤ 1/8, *t*∈[-1,1].

В общем случае на *k*-ой итерации устанавливается оценка

| *uk*(*t*) | ≤ 2-*k*, *t*∈[-1,1].

Таким образом, при *k* → ∞ имеет место сходимость *uk*(*t*) → 0.

Полученные результаты показывают, что для любого начального приближения управления, выбираемого из множества *U*, последовательность {*uk*}, определяемая в соответствии с методом последовательных приближений, сходится к функции *u*\*, тождественно равной нулю.

Возникает естественный вопрос: будет ли найденное значение *u*\* решением поставленной задачи оптимального управления? Для ответа на этот вопрос вернемся к постановке рассматриваемой задачи. Поскольку подынтегральное выражение в минимизируемом функционале не отрицательно, справедливо неравенство *I*≥0 для любого допустимого управления. Нулевое значение функционала может достигаться исключительно при выполнении равенств

*u*(*t*) = 0, *х*(*t*) = 0, *t*∈[-1,1].

Нулевое значение управления является допустимым, причем согласно задаче (12.13) ему соответствует как раз значение функции состояния, тождественно равной нулю. Таким образом, нулевое значение функционала достигается как раз на допустимом управлении *u*\*, а отрицательные значения минимизируемого функционала не реализуются. Следовательно, рассматриваемая задача оптимального управления имеет единственное решение, которое и было найдено в результате приближенного решения полученных условий оптимальности.

### Задание 9. Простейшая оптимизационная задача

Рассматривается система



Требуется минимизировать функционал



На множестве



Варианты.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| № |  | *T* | *x*0 |  |  | *a* | *b* |
| 1 |  | 1 | 0 | 0 |  | -1 | 1 |
| 2 |  | 2 | 1 |  | 0 | 0 | 1 |
| 3 |  | 3 | -1 |  |  | 0 | 2 |
| 4 |  | 1 | 2 |  |  | -1 | 1 |
| 5 |  | 2 | 0 | 0 | *x* | -2 | 2 |
| 6 |  | 3 | 1 |  | 0 | -1 | 0 |
| 7 |  | 1 | -1 |  |  | -1 | 1 |
| 8 |  | 2 | -2 |  |  | 0 | 1 |
| 9 |  | 3 | 1 | 0 |  | 1 | 2 |
| 10 |  | 1 | -1 |  |  | 0 | 1 |

Задание:

1. Записать постановку задачи.
2. Определить функцию *H*.
3. Определить сопряженное уравнение с конечным условием.
4. Найти управление из условия максимума.
5. Записать итерационный метод для решения условия максимума.

### Задание. Задача оптимального управления для системы уравнений

Рассматривается задача оптимального управления для системы уравнений



с начальными условиями



Множество допустимых управлений описывается неравенствами



Требуется минимизировать функционал

.

Таблица параметров

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| варианты |  |  |  |  |
| 1 |  |  |  |  |
| 2 |  |  |  |  |

Требуется:

1. Записать постановку задачи.
2. Определить функцию *H*.
3. Определить сопряженную систему
4. Найти управление из условия максимума.
5. Записать итерационный метод для решения условия максимума.